1. Distribución beta

<u>Definición</u>: Se dice que una variable aleatoria Y tiene una distribución de probabilidad beta con parámetros $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ si y solo si la función de densidad de Y esta representada por

$$f(y) = \begin{cases} \frac{y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)} & , \quad 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & , \quad \text{en otro punto} \end{cases}$$

donde

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1} dy = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

<u>Teorema</u>: Si Y es una variable aleatoria con distribución beta y parámetros $\alpha > 0$ y $\beta > 0$, entonces

$$\mu = E[Y] = \tfrac{\alpha}{\alpha+\beta} \text{ y } \sigma^2 = V(Y) = \tfrac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}.$$

<u>Ejemplo</u>. El porcentaje de impurezas por lote en un producto químico es una variable aleatoria Y con una función de densidad

$$f(y) = \begin{cases} 12y^2(1-y) & , \quad 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & , \quad \text{en otro punto} \end{cases}$$

Un lote con mas de 40 % de impurezas no puede venderse. ¿Cuál es la probabilidad de que un lote elegido aleatoriamente no pueda venderse?. Halle, también, la media y la varianza del porcentaje de impurezas en un lote elegido al azar.

<u>Solución</u>.
Es claro que $Y \sim \text{Beta}(3,2)$. Verifiquemos que la constante es efectivamente 12.

$$\frac{1}{B(\alpha,\beta)} = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} = \frac{\Gamma(5)}{\Gamma(3)\Gamma(2)} = \frac{4!}{2!1!} = 12.$$

Ahora lo que queremos es conseguir $P(Y > 0{,}4)$, luego

$$P(Y > 0{,}4) = \int_{0{,}4}^1 12y^2(1-y)dy = 12\int_{0{,}4}^1 (y^2 - y^3)dy = 12\left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_{0{,}4}^1 = 0{,}8208.$$

Para ver cual es la media

$$\mu = \frac{3}{3+2} = \frac{3}{5} = 0{,}6.$$

Por lo tanto se espera conseguir en promedio 60 % de impurezas. Por otro lado

$$\sigma^2 = \frac{3{,}2}{(3+2)^2(3+2+1)} = \frac{1}{25}.$$

Claramente, al igual que sucedia con la función gamma, se podrán realizar las integrales si los parámetros son enteros.